

Tall og mengder

Per G. Østerlie

30. september 2013

1 Introduksjon

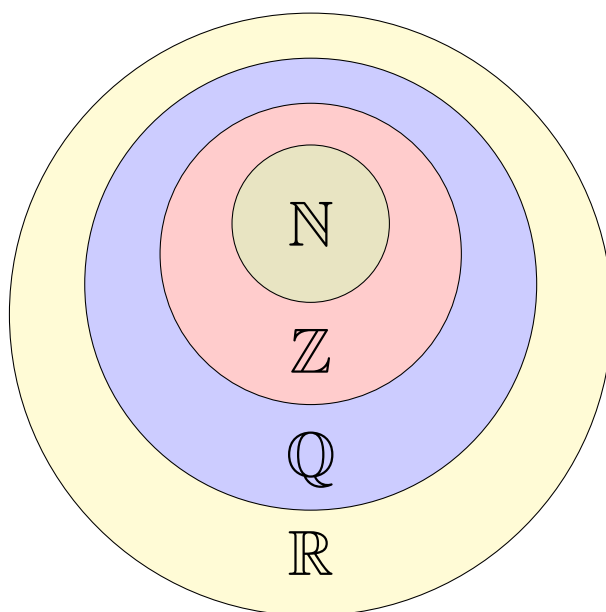
Nå skal vi se på hva mengder og intervaller er og hvilke symboler vi benytter. Vi starter med å se på tall og hvordan vi kan dele opp i typer av tall: naturlige tall, heltall, rasjonale tall og reelle tall. Hver av disse kaller vi mengder. hvordan vi kan. Vi skal også se på symbolene $\{ \}$ $[]$ $\langle \rangle$ \in og \notin

2 Mengder

Tallene våre kan vi dele inn i flere mengder:

- Natulige tall, \mathbb{N}
- Heltall, \mathbb{Z}
- Rasjonale tall, \mathbb{Q}
- Reelle tall, \mathbb{R}

Vi kan framstiller disse mengdene som sirkler i en figur for å vise slektskapet. Alle de naturlige tallene er med blant heltallene. De reelle tallene inneholder begge disse.



2.1 Naturlige tall

Naturlige tall er alle heltallene. Det er vanlig å kalle alle de naturlige tallene for \mathbb{N} . Da kan vi skrive:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Her har vi benyttet symbolene $\{$ og $\}$. Det gjør vi når vi ønsker å liste opp alle elementene, eller medlemmene, i en mengde. Hvert element skilles med ett komma. Når det blir for mye å jobbe, eller umulig, og skrive alle elementene bruker vi prikker for å markere. Hva prikkene står for bør være klart ut fra sammenhengen. I dette tilfellet mener vi alle heltallene videre oppover. Siden denne tallmengden består av uendelig mange tall markerer vi at den fortsetter på samme måte videre.

2.2 Hele tall

Tar vi med null og de negative heltallene får vi mengden av alle hele tall. De kaller vi \mathbb{Z} og vi kan skrive:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Da har vi fått med de negative tallene. Legg merke til at prikkene i starten forteller at mengden omfatter alle de negative heltallene.

2.3 Rasjonale tall

Nå er det ikke alle tall som er heltall. Det fins tall mellom heltallene. Tenk bare på 0,5 eller $\frac{1}{3}$. Begge er tall mellom 0 og 1. De er eksempler på rasjonale tall. Heltallene er greie å ha ved telling. Legger vi sammen, trekker fra eller multipliserer heltall, får vi alltid et heltall. Når vi derimot dividerer heltall vil vi ofte ende opp med et tall som ikke er et heltall. Slike tall er rasjonale tall.

Vi benytter symbolet \mathbb{Q} for rasjonale tall. Det symbolet ble tatt i bruk i 1895 av en den italienske matematikeren Peano etter "quoziente", som er italiensk for kvotient. Alle rasjonale tall kan derfor skrives som brøker.

2.4 Reelle tall

Lenge trodde matematikerne at alle tall kunne skrives som brøker, men det skulle vise seg å være feil. Du har kanskje hørt om Pythagoras som hadde en elev som mente at det fantes tall som ikke lot seg skrive som brøker? Det fortelles at Pythagoras tok han med ut på Egerhavet, knyttet en stor stein rundt føttene på eleven og kastet bråkmakeren over bord. Nå vet vi at eleven hadde rett. To eksempler på tall som ikke er rasjonale, men reelle, er $\sqrt{2}$ og π . Ingen av disse kan skrives som brøker.

Vi benytter symbolet \mathbb{R} for å skrive de reelle tallene.

3 Intervaller

Når vi skal skrive matematikk får vi ofte behov for å skrive ned mengder i form av intervaller. Et eksempel er når vi skal skrive ned svaret på ulikheter.

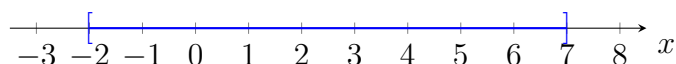
Vi har allerede sett på bruken av klammeparenteser. De benyttes når vi ønsker å skrive ned alle tallene som er med i mengden. Slik kan vi skrive ned mengden av tallene 2, 5 og 7.

$$\{2, 5, 7\}$$

Hva om jeg ønsker å skrive ned alle de reelle tallene fra og med 2 og til og med 7? Jo, da kan jeg skrive det slik.

$$[-2, 7]$$

På tallinja kan vi illustrere dette slik



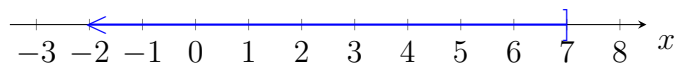
Figur 1: Intervallet $[-2, 7]$.

3.1 Åpne eller lukka intervaller

Vi snakker om åpne og lukkede intervaller. Intervallet vi så på over er lukket siden både 2 og 7 er med i intervallet. Det er et krav for å kalle et intervall for lukket. Alle andre intervaller er enten åpne eller halvåpne, avhengig av om endeverdiene er med i mengden. Her er en del andre eksempler

$\langle -2, 7 \rangle$ er et åpent intervall og omfatter alle de reelle tallene fra minus to til sju, men ikke minus to og sju.

Her er det illustrert på tallinja:



Figur 2: Intervallet $\langle -2, 7 \rangle$.

Her er en del andre eksempler

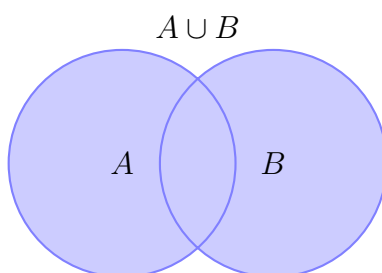
$[-2, 7 \rangle$ er et halvåpent intervall og omfatter alle de reelle tallene fra og med minus to, til sju, men ikke sju.

$\langle -2, 7] \rangle$ er et halvåpent intervall og omfatter alle de reelle tallene fra minus to, men ikke minus to, til og med sju.

4 Union

Tidligere var Norge i en union med Sverige. De to landene var slått sammen til ett land. Det er nettopp det en union er: En sammenslåing av to mengder.

En union kan vi vise i et venndiagram (et diagram oppkalt etter en engelsk matematiker som het John Venn (1843-1923)).



Venndiagrammet minner også litt om Norge og Sverige?

Vi har to mengder som vi kaller A og B :

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 7\}$$

Unionen av de to mengdene får vi når vi «slår sammen» alle elementene. Bruker vi de matematiske symbolene kan vi skrive:

$$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

\cup er det matematiske symbolet for union

5 Hva skal vi bruke dette til?

Når vi løse likninger eller ulikheter vil vi få bruk for å skrive svarene som mengder. Da er det vanlig å skrive ned løsningsmengden. Her er et eksempel:

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

Der står det «løsningmengden er ...»

Noen ganger må vi også skrive ned i hvilken mengde en variabel er «medlem». Her er et eksempel:

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

Over står det «x er element i mengden ...». Det kan vi lese som «x er medlem i ...»